**第1章 半群和幺半群**

**§1.1 若干基本概念**

**映射**：设和是两个非空集合，一个从到的映射是一个满足以下两个条件的的子集：

1. 对的每一个元素，存在一个使得；
2. 若、，则。

**二元代数运算：**设是一个集合，一个从到的映射称为上的二元代数运算。符号表示：“”或“•”,称为乘法，记为称作与的积。

**一元代数运算：**一个从集合到集合的映射称为到的一个一元代数运算。当时，则称此一元代数运算为上的一元代数运算。

**注：上的一元和二元代数运算均满足运算的封闭性。**

**代数系：**设“”是非空集合上的一个二元代数运算，则称二元组为一个(有一个代数运算的)代数系。

**运算律：**

1. 结合律：设“”是上的一个二元代数运算。如果有： 则称此二元代数运算适合结合律。
2. 交换律：若对有： 则称此二元代数运算适合交换律。
3. 分配律：设是具有两个二元代数运算“”和“”的代数系。

* 左分配律：如果，有：则称“”对“”满足左分配律。
* 右分配律：如果，有：则称“”对“”满足右分配律。
* 合成：如果二元代数运算“”满足交换律, 则左分配律与右分配律合为一，此时称“”对“”满足分配律。

**运算律相关定理：**

1. 设是一个代数系，如果二元代数运算“”适合结合律，则，个元素的乘积仅与这个元素及其次序有关而唯一确定。
2. 设是一个代数系，如果二元代数运算“”适合结合律和交换律，则，个元素的乘积仅与这个元素有关而与它们的次序无关。
3. 设是具有两个二元代数运算的代数系。如果加法“”满足结合律“”对“”满足左(右)分配律，则对,有：

**单位元素：**设是一个代数系，

* 左单位元素：如果存在一个元素使得有： ，则称为乘法“”的左单位元素；
* 右单位元素：如果存在一个元素使得有：，则称为乘法“”的右单位元素；
* 单位元素：如果存在一个元素使得有： ，则称为乘法“”的单位元素。
* **重要定理：设是一个代数系，如果二元代数运算“”既有左单位元又有右单位元，则，从而有单位元。**

**零元素：**设是一个代数系。若存在一个元素使得有： 则称是“”的零元素

**简记形式**：设是一个代数系。定义：简记为。而把写成。 特别地，当时，, 简记为，即： 。

**§1.2 半群与幺半群的概念**

**半群：**设“”是非空集合上的一个二元代数运算，称为乘法。若对有则称集合对乘法“”形成一个半群，记为。即半群就是满足结合律的二元代数运算的代数系。

**交换半群：**设为半群， 若乘法“”还满足交换律，则称为交换半群，或称为可换半群。

**有限半群：**只含有有限个元素的半群称为有限半群，否则称为无限半群。

如果半群中既有左单位元又有右单位元，则左单位元与右单位元相等，从而有单位元素且单位元素是唯一的。

**幺半群：**有单位元素的半群称为幺半群。其单位元素记为, 幺半群记为。若为有限集， 则称为有限幺半群。把的基数称为幺半群的阶。

设是一个幺半群，是任意的非负整数，则有：

如果是可交换的，则对有，其中，

**幺半群的逆：**设是一个幺半群，元素，

* 如果存在一个元素使得 ，则称为的左逆元素；
* 如果存在一个元素使得，则称为的右逆元素；
* 如果存在一个元素使得，则称为的逆元素。
* 幺半群中元素若有左逆元素又有右逆元素，则，于是有逆元素且的逆元素唯一，记为。

**群：**每个元素都有逆元素的幺半群称为群。

**第2章 群**

**§2.1 群的定义**

**群：**设为一非空集合，“”为上的二元代数运算，称为乘法，且满足：

1. 结合律：对有：；
2. 有左单位元e：即对，；
3. 有左逆元素：即对，，使得（为上述左单位元）则称为群。

C:\Users\ETERNITY\AppData\Roaming\Tencent\Users\1557588606\QQ\WinTemp\RichOle\ECAP1GT@BK2H7U$`1QCIDC9.png**等价定义或判定定理：**

**定理一：**1) “”满足结合律； 2) 对，方程 在中有解。

**定理二：**1) “”满足结合律； 2) “”满足左右消去律。(**有限群**)

**交换群（可换群）：**设为群，乘法“”满足交换律，即对有 ：，则称为交换群（可换群），或称为阿贝尔群（Abel群）

**有限群：**设为群，且是有限集，则称为有限群，此时称的基数为的阶。

**无限群：**设为群，且含有无穷多个元素。

**§2.2 群的简单性质**

**定理1；**设为群，则对，的左逆元也是的右逆元。

**定理2：**设为群，则的左单位元也是右单位元。

**定理3：**设为群，则对有：，

**定理4：**设为群，则对，方程：

关于未知量与均有唯一解。

**定理5：**设为一非空集合， “”为上的二元代数运算，则为群的充要条

C:\Users\ETERNITY\AppData\Roaming\Tencent\Users\1557588606\QQ\WinTemp\RichOle\ECAP1GT@BK2H7U$`1QCIDC9.png

件为：1) “”满足结合律 ; 2) 对，方程 在中有解。

**定理6：**设为群，则关于乘法“ ”满足消去律，即对有:

1. 若，则（称为左消去律）
2. 若，则（称为右消去律）

**定理7：**为非空有限集合，“”为上的二元代数运算，则为群的充要条件:

1) “”满足结合律； 2) “”满足左右消去律。

**元素的阶：**设为群，，使的最小正整数称为的阶，记为. 反之则称的阶为无穷大。

注：若的阶为无穷大，则不可能有；有限群的每个元素的阶不超过该有限群的阶。

**§2.3 子群、生成子群**

**子群：**设为群，是的非空子集，若“”在中封闭且对此乘法也构成 一个群，则称是的一个子群。

**子群的性质：**

1. 设为群的子群，则的单位元必是的单位元；的元素在中逆元素也是在中的逆元素。
2. 群的任意多个子群的交还是的子群。
3. 任一群不能是其两个真子群的并。
4. 群的非空子集为的子群的充分必要条件是：

**推论：群的非空子集为的子群的充分必要条件：**

1. 群的**有限**非空子集是的子群的充分必要条件是，即 :

**生成子群：**设是群的非空子集，则的包含的所有子群的交称为由生成的子群，记为。

**迭代扩张算法：**设为群，为的非空子集, 则由扩充为的生成子群

方法:

1. 构造可逆性
2. 构造封闭性
3. 验证

**中心：**设为群，,对，有则称的中心元素。由的中心元素所构成的集合称为的中心，即：

注：群的中心是的可交换子群。

**换位子：**设为群，对,称为与的换位子。

**换位子群：**的所有换位子的集合所生成的子群。

**§2.4 变换群、同构**

**同构：**设与为群，若存在一一映射，使得对有则称与同构，记为称为到的一个同构。

注：同构的两个群，除了在元素和代数运算的表示符号不同 外，他们的性质完全一样， 抽象地看是一样的。

**同构的性质：**

* 自反性：
* 对称性：若，则
* 传递性：若，则

**对称群：**设为非空集合，的一一映射，记，则关于映射的合成运算构成一个群，称为上的对称群。 当时， 则为所有次置换之集，称为次对称群。

**变换群：**的任一子群称为上的一个变换群。

**置换群：**的任一子群称为置换群。

**群的Cayley同构定理：**任何一个群同构于某个变换群。**（证明不作要求）**

* 推论：任一阶有限群同构于次对称群的一个阶子群。即有限群同构于某个置换群。**（要点：1.构造基于群的变换群； 2.构造同构映射）**

**自同构：**设为群，上的一一映射，且对有，则称为的一个自同构。

**自同构群：**设为群，则的所有自同构之集对映射的合成运算构成一个群，称为的自同构群。

**\*内自同构：**群的由其元素确定的自同构，称为G的内自同构。群所有内自同构之集是的自同构群的一个子群，称为内自同构群

**\*外自同构：**的其他自同构称为外自同构。

**§2.5 循环群**

**循环群：**若群由其中的某个元素生成的，记为，称为的生成元。

* 循环群必为交换群（类似循环半群必为交换半群）；
* 设，且的阶为无穷,则循环群为无穷循环群的充要条件是的阶为无穷大；
* 设，且的阶为，即有，则 ，

循环群为阶循环群的充要条件是的阶为。

* **生成元的唯一性问题**

1. 设，且的阶为无穷， 则与均为的生成元；
2. 设，且的阶为， 则其生成元为， 且，。

**循环群的同构：**

* 无穷循环群同构于整数加法群；
* 阶为的有限循环群同构于

**循环群的子群：**

* 循环群的子群仍为循环群
* 若为无穷循环群，则的子群为, 或为，且为无限循环子群，从而同构于。
* 若为阶循环群，且的阶为，则其子群的阶必整除，对的任意因子，必有一个阶为的子群，，即

**§2.6 子群的陪集**

**左（右）陪集：**设为群的子群，为的任一元素，集合称为子群的一个左陪集，称为的一个右陪集。

**陪集的性质：**

* 设为群的子群，，则的充要条件是。
* 设为群的子群，则，当且仅当。
* 设为群的子群，则，或。
* 设为群的子群，则，有。
* 设为群的子群， 为的所有左陪集构成的集族，为所有右陪集构成的集族，则有。
* 设为群的子群，则的所有左陪集构成的集族是的一个划分。

**子集的指数：**设为群的子群，若的所有不同的左陪集的个数为有限数，则 称为在中的指数，记为，否则说在中的指数为无穷大。

Lagrange**定理：设是一个阶为的有限群，为的一个阶子群，则**

* 推论1 有限群中每个元素的阶能整除该有限群的阶。
* 推论2 若有限群的阶为素数，则是个循环群。
* 推论3 设是一个阶群，则对的每个元素，都有 。

**§2.7 正规子群、商群**

**群子集：**设为群，对任意的集合，满足，称为群子集。记为：

**群子集上的乘法：**对，则为上的二元代数运算。且对，，显然若为的子群，则。

* 设为群，则对有，若是的子群，则:

*,*

* 设为群的子群，则是的子群的充要条件是。

**正规子群：**设为群的子群，若对，有，则称是的正规子群。

**正规子群的证明：**

* ，有。
* *，*
* ***，***

**商群：**设为群的正规子群，的所有左陪集构成的集族对群子集乘法形成一个群，称为对的商群，记为。

**§2.8 同态基本定理**

**同态：**设与为群，若存在映射, 使得对有则称为到上的一个同态。

* 满同态：若为满射，记为；
* 单同态：若为单射；
* 同构：若既为满射又为单射，即一一映射。

**同态的性质：**

**定理1：**设与为群，的同态，则对有：

**定理2：**设为群，是一个具有二元代数运算的代数系，的满射，且对有，则是群。**（主证可逆）**

**定理4：**设与为群，的满同态，则：

1. 若是的子群，则)是的子群；
2. 若是的正规子群，则)是的正规子群；
3. 若是的子群，则)是的子群；
4. 若是的正规子群，则)是的正规子群；

**定理3：**设与为群，的满同态，则是的一个正规子群。

**核、同态象：**设与为群，的满同态，则的正规子群称为同态的核，记为。称为下的同态象。

**定理5：**设是的正规子群，则有：(自然同态)。若是到的同态，则

**群的同态基本定理：**设的满同态，，则。**（证明不作要求）**

**定理7：**对于群的任一满同态均可分解成一个自然同态与一个同构的合成。即，并且是唯一的。

**第3章 环和域**

**环：**设为非空集合，中有两个二元代数运算，分别称为加法“”与乘法“”，且满足：

1. 是一个Abel群；
2. 是一个半群；
3. 乘法对加法满足左右分配律

**无零因子环：**无非零的左零因子，也没有非零的右零因子的环。即对，若，则必有或者。

**定理1**：环是无零因子环的充要条件是在中乘法满足消去律，即：

若，，则；

若，，则；

**整环：**可换无零因子环。

**体：**若环满足：

1. 至少含有一个非零元素；
2. 非零元素的全体对乘法构成一个群。

**域：**可换体称为域。注：体和域中没有零因子（因为关于乘法满足消去律）